

Dans cette séance on va voir

- (i) un peu plus sur les produits scalaires abstraits $\xrightarrow{\begin{matrix} \text{norme} \\ \text{associée,} \\ \text{famille orthogonale,} \end{matrix}}$
- (ii) la notion de projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel $\rightsquigarrow$ et comment la calculer
- (iii) le procédé de Gram-Schmidt

Exemple

Un autre exemple de produit scalaire abstrait.

Pour $V = \mathbb{R}^2$, on définit

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) := 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$$
$$= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

On va montrer que cela définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

En effet

$$(PS.1) \quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 = 3y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + 3y_2x_2$$
$$= \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \quad \checkmark$$

$$(PS.2) \quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} x_1 + \lambda x'_1 \\ x_2 + \lambda x'_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = 3(x_1 + \lambda x'_1)y_1 + (x_1 + \lambda x'_1)y_2 + (x_2 + \lambda x'_2)y_1 + 3(x_2 + \lambda x'_2)y_2$$
$$= 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + \lambda(3x'_1y_1 + x'_1y_2 + x'_2y_1 + 3x'_2y_2) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) + \lambda \left(\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \quad \checkmark$$

$$(PS.3) \quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 = 2(x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) = 2(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2)^2 \geq 0$$

et on l'égalitéssi: $x_1^2 = x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$

Pour produit scalaire abstrait on définit aussi la norme associée via

$$\|v\| := \sqrt{(v|v)}, \quad \forall v \in V$$

la notion d'orthogonalité $v \perp w$ via

$$v \perp w \iff (v|w) = 0,$$

la notion de famille orthogonale et orthonormée comme dans le cas du produit scalaire euclidien, ...

Exemple précédent (suite) Pour le produit scalaire abstrait ou dans l'exemple précédent?

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2)^2}$$

et

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 = 0$$

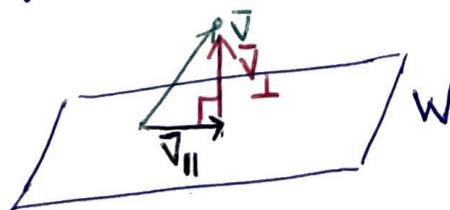
Par exemple

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ pour ce produit scalaire abstrait}$$

$$\left(\text{mais } \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \not\perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ pour le produit scalaire euclidien!} \right)$$

§ Projection orthogonale (Section 12.6 des notes de Sacha)

Idee Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un S.E.V. et $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$



$$\left. \begin{array}{l} \text{On peut écrire} \\ \bar{v} = \underbrace{\bar{v}_\perp}_{\in W^\perp} + \underbrace{\bar{v}_\parallel}_{\in W} \quad (*) \end{array} \right\}$$

Faits importants $\rightarrow \bar{v}_\perp$ et $\bar{v}_\parallel$ sont uniques

$\rightarrow$ on appelle $\bar{v}_\parallel$ la projection orthogonale de $\bar{v}$ sur W



Théorème 12.32 = Définition de projection orthogonale par sa "propriété"

Pour $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un SEV et $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique paire $\bar{v}_\parallel$ et $\bar{v}_\perp$ telle que

(P.O.1) $\bar{v} = \bar{v}_\parallel + \bar{v}_\perp$

(P.O.2) $\bar{v}_\parallel \in W$ $\leftarrow$ projection orthogonale de $\bar{v}$ sur W

(P.O.3) $\bar{v}_\perp \in W^\perp$

NOTATION $\text{proj}_W(\bar{v}) := \bar{v}_\parallel$

En plus, $\text{proj}_W(\bar{v})$ est l'unique vecteur de W qui satisfait que

$$\|\bar{v} - \text{proj}_W(\bar{v})\| \leq \|\bar{v} - \bar{w}\|, \quad \forall \bar{w} \in W$$

$\uparrow$
i.e. $\text{proj}_W(\bar{v})$ est le vecteur de W le plus proche à $\bar{v}$!

Cela nous donne deux propriétés qui caractérisent $\text{proj}_W(\bar{v})$
 $\rightarrow$ c'est utile pour démontrer des résultats mais pas pour calculer !

Alors, comment calculer $\text{proj}_W(\bar{v})$? $\rightarrow$ Il faut une BO de W !!

Théorème 12.33 | Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un SEV et $B = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k\}$

une BO de W . Alors,

$$\text{proj}_W(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|^2} \bar{w}_1 + \dots + \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_k}{\|\bar{w}_k\|^2} \bar{w}_k$$

En particulier, l'application $\bar{v} \mapsto \text{proj}_W(\bar{v})$ est linéaire.

(Preuve) Comme $\text{proj}_W(\bar{v}) \in W$ on peut écrire

$$\text{proj}_W(\bar{v}) = \alpha_1 \bar{w}_1 + \dots + \alpha_k \bar{w}_k$$

Et comme $\bar{v} = \underbrace{\text{proj}_W(\bar{v})}_{\in W} + \underbrace{(\bar{v} - \text{proj}_W(\bar{v}))}_{\in W^\perp}$, alors, par le Lemme 16,

$$(\bar{v} - \alpha_1 \bar{w}_1 - \dots - \alpha_k \bar{w}_k) \cdot \bar{w}_1 = 0,$$

$$(\bar{v} - \alpha_1 \bar{w}_1 - \dots - \alpha_k \bar{w}_k) \cdot \bar{w}_k = 0.$$

Or, comme B est orthogonale :

$$0 = (\bar{v} - \alpha_1 \bar{w}_1 - \dots - \alpha_i \bar{w}_i - \dots - \alpha_k \bar{w}_k) \cdot \bar{w}_i = \bar{v} \cdot \bar{w}_i - \underbrace{\alpha_1 \bar{w}_1 \cdot \bar{w}_i}_{=0} - \dots - \alpha_i \underbrace{\bar{w}_i \cdot \bar{w}_i}_{=1} - \dots - \underbrace{\alpha_k \bar{w}_k \cdot \bar{w}_i}_{=0}$$

$$= \bar{v} \cdot \bar{w}_i - \alpha_i \bar{w}_i \cdot \bar{w}_i$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_i}{\|\bar{w}_i\|^2}, \forall i$$

On laisse la linéarité comme exercice

□

Exemple 12.34 | BO de W

Soit $W = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On va calculer

$$\text{proj}_W \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{11}{30} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ -2 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$

On peut donner la matrice de proj_W :

Théorème 12.35 Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ une BON de W . Alors,

$$[\text{proj}_W]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n \end{bmatrix}^T$$

(Preuve) Le théorème précédent nous dit que

$$\text{proj}_W(\bar{v}) = (\bar{v} \cdot \bar{u}_1) \bar{u}_1 + \dots + (\bar{v} \cdot \bar{u}_n) \bar{u}_n,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \text{proj}_W(\bar{v}) &= (\bar{v} \cdot \bar{u}_1) \bar{u}_1 + \dots + (\bar{v} \cdot \bar{u}_n) \bar{u}_n = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v} \cdot \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \bar{v} \cdot \bar{u}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1^T \bar{v} \\ \vdots \\ \bar{u}_n^T \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1^T \\ \vdots \\ \bar{u}_n^T \end{pmatrix} \cdot \bar{v} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n \end{bmatrix}^T \cdot \bar{v}, \text{ ce qui donne le résultat.} \end{aligned}$$

□

Mais comment calculer une BO/BON de W ?

↓
Procédé de Gram-Schmidt (GG)

On commence avec $\mathcal{B} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ base de W
 On produit $\mathcal{B}' = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ BO de W

Méthode

$$\bar{v}_1 := \bar{w}_1$$

$$\bar{v}_2 := \bar{w}_2 - \frac{\bar{w}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1$$

$$\bar{v}_3 := \bar{w}_3 - \frac{\bar{w}_3 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 - \frac{\bar{w}_3 \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|^2} \bar{v}_2$$

⋮

$$\bar{v}_n := \bar{w}_n - \frac{\bar{w}_n \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 - \frac{\bar{w}_n \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|^2} \bar{v}_2 - \dots - \frac{\bar{w}_n \cdot \bar{v}_{n-1}}{\|\bar{v}_{n-1}\|^2} \bar{v}_{n-1}$$

Exemple 12.44 | Soit $W = \text{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_3} \right\}$

On va construire une BO de W via GA

$$\bar{v}_1 := \bar{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_2 := \bar{w}_2 - \frac{\bar{w}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_3 &:= \bar{w}_3 - \frac{\bar{w}_3 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 - \frac{\bar{w}_3 \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|^2} \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}{3/2} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et si l'on veut une BON ?

On normalise la BO

($\equiv GA$ "normalisée")

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_1 &:= \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_2 := \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|} = \frac{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3/2}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 0 \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ \bar{u}_3 &:= \frac{\bar{v}_3}{\|\bar{v}_3\|} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \rightarrow \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3 \}$$

BON de W